Шифр: 11-34

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
Математика
2019/2020
Ленинградская область

Район Бокситогорский

Школа МБОУ „СОШ №4" г. Пикалево им. А.П. Румянцева

Класс 11

ФИО Федоров Михаил Алексеевич

Чистовик. Лист №1/2 11-3И

1	2	3	4	5	Σ
4	7	–	–	0	11

11.1.

У 77 всего 8 целых делителей: $-77; -11; -7; -1; 1; 7; 11; 77$.
Наибольшее из них 77, тогда на доске двумя наибольшими
числами являются 1 и 77. Аналогично и с наименьшими.
Итог на доске написано 5 различных целых чисел: $-77; -1; 0; 1; 77$.
Писать числа больше 1 запрещено, т.к. единица должна оставаться
одним из двух наибольших чисел (одно из которых должно равнятся
77). Аналогично с -1. Поэтому на доске ~~все~~ всего пять чисел.
Лучше взять числа наибольшие: 7 и 11. Так как $7>1$ и в промежуток
$(-7; 7)$ можно вписать больше целых чисел чем в $(-1; 1)$.
И тогда на доске написано 17 чисел: $-11; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11$
Ответ: 17.

11.2.

Давайте объединим множества A и B. Тогда чисел в объединении
$2N$, а их сумма $2N^2$ (по условию).
Пусть все числа из двух наборов различны. Дальше пойдём от обратного
множеств нет повторяющихся чисел. Тогда и в сумме этих
возможную сумму: т.е. $\sum_{j=1}^{2N} j = \frac{2N(2N+1)}{2} = 2N^2+N$. Посчитаем их минимально
минимальная сумма всегда будет больше, чем должна быть. Как видно,
Противоречие. А значит, изначальное предположение было ошибочно,
и в множествах A и B есть повторяющееся(иеся) число(а).

11.5.

Пусть $R(N) = B(N) - S(N)$, где $B(N) = \sum_{j=1}^{N} B_j$ B_j – большое число в строчке
j, $S(N) = \sum_{j=1}^{N} S_j$ S_j – малое число в столбце j. Надо найти
$Min\, R(N)$. Для этого необходимы $Min\, B(N)$ и $Max\, S(N)$.
~~Для $Min\, B(N)$~~ Т.к. $\exists N^2$ и оно будет B_j $\forall j$, то вместе с ним в
~~одну строчку~~ удобней будет поставить числа от N^2-N+1 до N^2-1, так как
если какое-нибудь из этих чисел окажется в другой строке,
то оно будет самым там большим, что увеличит $B(N)$.
Заполнив одну строку, ищем наибольшее число и повторяем.

Чистовик. Лист № 2/2 11-34

1.5. продолжение.

В итоге получаем:

1	2	3	...	N
$N+1$	$N+2$	$N+3$	...	$2N$
$2N+1$	$2N+2$	$2N+3$	...	$3N$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
$(N-1)N+1$	$(N-1)N+2$	$(N-1)N+3$	...	N^2

Теперь ~~и~~ увеличим $S(N)$. Перемещение чисел внутри одной строки никакого результата не даст. Поэтому необходимо менять числа между строк, что увеличит $B(N)$, но возможно в большей мере увеличит $S(N)$. Трогать правый столбец бессмысленно, потому что он и даёт $\operatorname{Min} B(N)$, поэтому либо при затрагивании $\Delta B(N)=0$, а для $\Delta S(N)=0$, либо $\Delta B(N)>0$. Так же нету смысла трогать строки кроме первых двух, потому что при замене ~~в~~ чисел из первой строки на числа из последней $\Delta B(N) > \Delta S(N)$, что сделает $\Delta R(N)>0$. Оптимальный вариант менять 2 и $N+1$, 4 и $N+3$ .... $2\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$ и $N+2\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor-1$. При таком перемещении $\Delta R(N) = -\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$. ($\lfloor x\rfloor$ - ближайшее целое к x, но меньше его) И итоговое: $R(N)=\sum_{j=1}^{N} jN - \sum_{j=1}^{N} j - \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor = \frac{N(N^2-1)}{2} - \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$

Ответ: $\operatorname{Min} R(N) = \frac{N(N^2-1)}{2} - \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor$

Шифр: 2-11-21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
Математика
2019/2020

Ленинградская область

Район Бокситогорский

Школа МБОУ „СОШ №4" г. Пикалево им. А.П. Румянцева

Класс 11

ФИО Федоров Михаил Алексеевич

6	7	8	9	10	Σ
7	7	x	x	0	14

2-11-21

Чистовик. Лист №1/2

11.7.

Раскраска чисел до 2^3: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

1 1 2 1 1 2 2

Пусть мы умеем раскрашивать до 2^n, докажем, что и до 2^{n+1} тоже можем. Пусть $a \in N$, $a \in (0; 2^n)$, $b \in N$, $b \in (2^n; 2^{n+1})$.

Сумма двух любых a не достигнет 2^{n+1}: возьмём максимальные a. $a_1 = 2^n - 1$, $a_2 = 2^n - 2$; $a_1 + a_2 = 2^{n+1} - 3 < 2^{n+1}$

Сумма двух любых b не достигнет 2^{n+2}: возьмём максимальные b. $b_1 = 2^{n+1} - 1$, $b_2 = 2^{n+1} - 2$; $b_1 + b_2 = 2^{n+2} - 3 < 2^{n+2}$.

Сумма двух любых b ~~не может равняться~~ будет всегда больше 2^{n+1}: возьмём минимальные b: $b_1 = 2^n + 1$, $b_2 = 2^n + 2$; $b_1 + b_2 = 2^{n+1} + 3 > 2^{n+1}$.

Единственная ситуация, которая возможна, это сумма a и b равна 2^{n+1}. Для 2^n мы предположили, что можно раскрасить. Получаем: $a + b = 2^{n+1}$. Так как это, можно сказать, линейное уравнение относительно a от b, то $\forall b \; \exists! a$, так и наоборот, если смотреть на это, как уравнение относительно b от a. А значит, существует взаимооднозначное соответствие для a и b. И тогда b мы красим в противоположный цвет от a. А 2^n красим в любой. Умея красить числа до 2^n можно точно раскрасить и до 2^{n+1}! По методу мат. индукции можно раскрасить числа до 2^n, где $n \in N$, а в пределе раскрасить и все натуральные числа.

11.6. ~~Можно ли~~ $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = x^2+1$, $f_3(x) = x^3+1$, $f_4(x) = x^4+1$.

$g_1(x) = f_1(x) \cdot f_1(x) = (x+1)\cdot(x+1) = x^2+2x+1$

$g_2(x) = g_1(x) - f_2(x) = (x^2+2x+1) - (x^2+1) = 2x$

При $x>0$ $g_2(x)>0$, при $x<0$ $g_2(x)<0$

Ответ: $g(x) = (x+1)\cdot(x+1) - (x^2+1)$

Чистовик № 2/2 2-11-21

~~н точно н~~

11.10. 1) н точно не меньше чем 5, т.к. только за 5 ходов можно гарантировать, что Петя назвал хотя бы три значения одного из многочленов. Предположим, что это не так, тогда названо лишь два значения для многочленов, т.е. произошло 4 хода, а на пятый Петя обязан сказать третье значение.

2) Так же Вася должен всегда говорить разные t, ~~хх~~ потому что говорить одинаковые абсолютно бессмыслено: Петя скорее всего назовёт то же значение, и ход будет упущен.

Получить три значения многочлена важно, так как парабола строится минимум на трёх точках.